**Старое и новое о круге**

“Из всех фигур прекраснейшая – круг” (Пифагор)

Любой школьник вычисляет теперь длину окружности по диаметру гораздо точнее, чем мудрейший жрец древней страны пирамид или самый искусный архитектор великого Рима. Древние египтяне считали, что окружность длиннее диаметра в 3,16 раза, а римляне считали, что окружность длиннее диаметра в 3,12 раза, между тем правильное отношение – 3,14159….. Египетские и римские математики установили отношение длины окружности к диаметру не строгим геометрическим расчетом, как позднейшие математики, а нашли его просто из опыта. В связи с этим становится более понятным, почему древний мир не знал правильного отношения длины окружности к диаметру, и понадобился гений Архимеда, чтобы найти для значение - найти без измерений, одними лишь рассуждениями.

В «Алгебре» древнего арабского математика Магомета-бен-Муза о вычислении длины окружности читаем такие строки:

«Лучший способ – это умножить диаметр на . Это самый скорый и самый легкий способ. Богу известно лучшее».

Теперь мы знаем, что архимедово число не вполне точно выражает отношение длины окружности к диаметру. Теоретически доказано, что это вообще не может быть выражено какой-либо точной дробью. Мы можем написать его лишь с тем или иным приближением, впрочем, далеко превосходящим точность, необходимую для самых строгих требований практической жизни. Математик XVI века Лудольф, в Лейдане, имел терпение вычислить его с 35 десятичными знаками и завещал вырезать это значение для на своём могильном памятнике. Вот оно: 3,14159265358979323846264338327950288….

Письменная история числа π начинается с египетского папируса, датируемого примерно 2000 годом до нашей эры, но оно было известно еще древним людям. Число π обратило на себя внимание людей ещё в те времена, когда они не умели письменно излагать ни своих знаний, ни своих переживаний, ни своих воспоминаний. С тех пор как первые натуральные числа 1,2,3,4,… стали неразлучными спутниками человеческой мысли, помогая оценивать количества предметов либо их длины, площади или объёмы, люди познакомились с числом π. Тогда оно ещё не обозначалось одной из букв греческого алфавита и его роль играло число 3. Нетрудно понять, почему числу π уделяли так много внимания. Выражая величину отношения между длиной окружности и её диаметром, оно появилось во всех расчётах связанных с площадью круга или длиной окружности. Но уже в глубокой древности математики довольно быстро и не без удивления обнаружили, что число 3 не совсем точно выражает то, что теперь известно как число пи. Безусловно, к такому выводу могли прийти только после того, как к ряду натуральных чисел добавились дробные или рациональные числа. Так египтяне получили результат:

attach

В дальнейшем Архимед *(расскажите об этом математике древнего мира)*, используя метод верхних и нижних приближений, получает границы числа пи.

Индусы в V-VI веках пользовались числом attach, китайцы – числом attach, а еще

Обозначение числа π происходит от греческого слова περιφερια ("окружность"). Впервые это обозначение использовал в 1706 году английский математик У.Джонс, но общепринятым оно стало после того, как его (начиная с 1736 года) стал систематически употреблять Леонард Эйлер. В конце 18 века И.Ламберт и А.Лежандр установили, что π иррациональное число *(вспомните, что это значит)*, а в 1882 году Ф. Лидерман доказал, что оно трансцендентное, т.е. не может удовлетворять никакому алгебраическому уравнению с целыми коэффициентами.

На протяжении всего существования числа π, вплоть до наших дней, велась своеобразная "погоня" за десятичными знаками числа π. Леонардо Фибоначи около 1220 года определил три первых точных десятичных знаков числа π. В 16 веке Андриан Антонис определил 6 таких знаков. Франсуа Виет (подобно Архимеду), вычисляя периметры вписанного и описанного 322216-угольников, получил 9 точных десятичных знаков. Андриан Ван Ромен таким же способом получил 15 десятичных знаков, вычисляя периметры 1073741824-угольников. Лудольф Ван Кёлен, вычисляя периметры 32512254720-угольников, получил 20 точных десятичных знаков. Авраам Шарп получил 72 точных десятичных знаков числа π. В 1844 году З.Дазе вычисляет 200 знаков после запятой числа π, в 1847 году Т.Клаузен получает 248 знаков, в1853 Рихтер вычисляет 330 знаков, в том же 1853 году 440 знаков получает З.Дазе и в этом же году У.Шенкс получает 513 знаков. С появлением ЭВМ количество верных знаков десятичных знаков резко возрастает: 1949 год — 2037 десятичных знаков (Джон фон Нейман, ENIAC), 1958 год — 10000 десятичных знаков (Ф.Женюи, IBM-704), 1961 год — 100000 десятичных знаков (Д.Шенкс, IBM-7090), 1973 год — 10000000 десятичных знаков (Ж.Гийу, М.Буйе, CDC-7600), 1986 год — 29360000 десятичных знаков (Д.Бейли, Cray-2), 1987 год — 134217000 десятичных знаков (Я.Канада, NEC SX2), 1989 год — 1011196691 десятичных знаков (Д.Гудновски и Г.Гудновски, Cray-2+IBM-3040)"

При вычислении верных десятичных знаков числа π пользовались различными способами, некоторые, как и Архимед вычисляли периметры вписанных и описанных n-угольников, но позднее стали прибегать к помощи рядов. Так Лейбниц вычислял с помощью ряда:

attach

Шарп применил ряд:

attach

Л.Эйлер с помощью ряда:

attach

Джон Валлис (1616-1703) нашёл бесконечное произведение, с помощью которого можно вычислить число пи:

attach

**«Что я знаю о кругах?» - вопрос, скрыто заключающий в себе и ответ: 3,1416.**

**Ошибка Джека Лондона.**

Следующее место романа Джека Лондона «Маленькая хозяйка большого дома» дает материал для геометрического расчета:

«Посреди поля возвышался стальной шест, врытый глубоко в землю. С верхушки шеста к краю поля тянулся трос, прикрепленный к трактору. Механики нажали рычаг – и мотор заработал.

Машина сама двинулась вперед, описывая окружность вокруг шеста, служившего его центром.

- Чтобы окончательно усовершенствовать машину, - сказал Грэхэм, - вам остается превратить окружность, которую она описывает, в квадрат.

- Да, на квадратном поле пропадает при такой системе очень много земли.

Грэхэм произвел некоторые вычисления, затем заметил:

- Теряется примерно три акра из каждых десяти.

- Не меньше.»

Предлагаю вам проверить этот расчет.

Решение:

Расчет неверен: теряются меньше чем 0,3 всей земли. Пусть, в самом деле, сторона квадрата – а. Площадь такого квадрата – а2. Диаметр вписанного круга равен также а, а его площадь - Пропадающая часть квадратного участка составляет:

а2 - а2/4=(1- а2=0,22 а2

мы видим, что необработанная часть квадратного поля составляет не 30%, как полагали герои американского романа, а только около 22%.

**Факты и расчеты.**

Окружностью называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, равноудалённых от заданной точки. Эта заданная точка называется центром окружности.

Расстояние от точек окружности до её центра называется радиусом окружности. Радиусом называется также отрезок, соединяющий любую точку окружности с её центром (рис. 1).

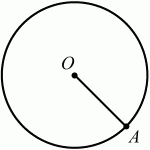


Рис. 1.

ОА – радиус окружности.

Радиусы окружностей часто обозначают буквами R или r, т. е. ОА = R или ОА = r.

Круг – это часть плоскости, ограниченная окружностью (рис. 2).

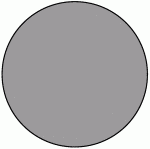


Рис. 2.

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется хордой. Хорда, проходящая через центр, называется диаметром окружности (рис. 3).

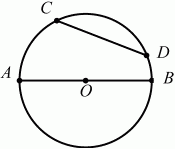


Рис. 3.

АВ – диаметр окружности, CD – хорда.

Диаметры окружностей часто обозначают буквами D или d. Очевидно, что D = 2R или d = 2 r.

Дуга окружности – это её часть, ограниченная двумя точками окружности (рис. 4).

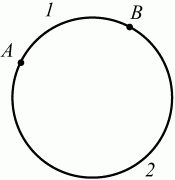


Рис. 4.

Точки А и В делят окружность на две дуги:1 и 2.

Сектор круга – часть круга, ограниченная двумя радиусами и соответствующей дугой (рис. 5).

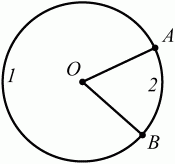


Рис. 5.

Радиусы ОА и ОВ разделили круг на два сектора:1 и 2.

Сегмент круга – это часть круга, ограниченная хордой и соответствующей дугой (рис. 6).

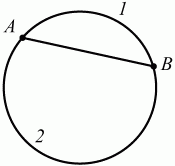


Рис 6.

Хорда АВ делит круг на два сегмента:1 и 2.

Окружность называется описанной около треугольника, если она проходит через все его вершины (рис. 7).

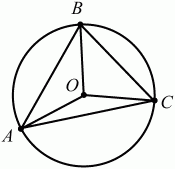


Рис. 7.

ОА = ОВ = ОС = R.

Прямую, проходящую через середину отрезка перпендикулярно к нему, называют серединным перпендикуляром (рис. 8). В связи с этим говорят, что центр окружности, описанной около треугольника, лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

а – серединный перпендикуляр к отрезку АВ (АО = ОВ).

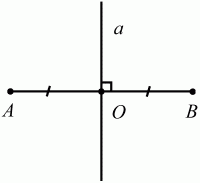


Рис. 8.

Прямая, проходящая через точку окружности в той же плоскости перпендикулярно к радиусу, проведённому в эту точку, называется касательной. При этом данная точка окружности называется точкой касания (рис. 9).

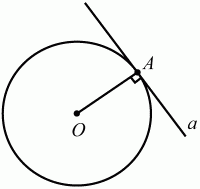


Рис. 9.

а – касательная к окружности, А – точка касания, а ⊥ ОА.

Говорят, что две окружности, имеющие общую точку, касаются в этой точке, если они имеют в этой точке общую касательную. Касание окружностей называется внутренним, если центры окружностей лежат по одну сторону от их общей касательной. Касание окружностей называется внешним, если центры окружностей лежат по разные стороны от их общей касательной (рис. 10, а; б).

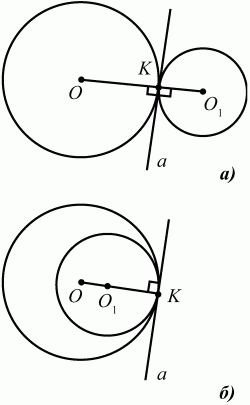


Рис. 10.

а – общая касательная к двум окружностям, К – точка касания.

Окружность называется вписанной в треугольник, если она касается всех его сторон (рис. 11).

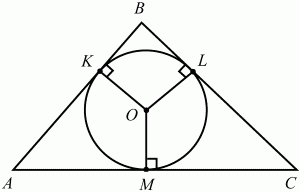


Рис. 11.

Точки K, L, M – это точки касания окружности, вписанной в ⊿ABC. OK = OL = OM = r.

**“Умение решать задачи – такое же практическое искусство, как умение плавать или бегать на лыжах. Ему можно научиться только путем подражания или упражнения”.**

***(Д. Пойа)***

В задачах на построение речь идет о построении геометрической фигуры с помощью данных чертёжных инструментов. Такими инструментами чаще всего являются линейка и циркуль. Решение задачи состоит не столько в построении фигуры, сколько в решении вопроса о том, как это сделать, и соответствующем доказательстве. Задача считается решённой, если указан способ построения фигуры и доказано, что в результате выполнения указанных построений действительно получается фигура с требуемыми свойствами.

С помощью линейки, как инструмента геометрических построений, можно провести произвольную прямую; произвольную прямую, проходящую через данную точку; прямую, проходящую через две данные точки. Никаких других операций выполнить линейкой нельзя. В частности, нельзя откладывать линейкой отрезки, даже если на ней имеются деления.

Циркуль, как инструмент геометрических построений, позволяет описать из данного центра окружность определенного радиуса. Циркулем также можно отложить определенный отрезок на данной прямой от заданной точки.

Геометрическим местом точек называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, обладающих определённым свойством.

Например, окружность можно определить как геометрическое место точек плоскости, равноудалённых от данной точки.

Сущность метода геометрических мест, используемого при решении задач, состоит в следующем. Пусть, решая задачу, нам надо найти точку X, удовлетворяющую двум условиям. Геометрическое место точек, удовлетворяющих первому условию, есть некоторая фигура F1, а геометрическое место точек, удовлетворяющих второму условию, есть некоторая фигура F2. Искомая точка X принадлежит F1 и F2, т. е. является их точкой пересечения. Если эти геометрические места простые (скажем, состоят из прямых и окружностей), то мы можем их построить и найти интересующую нас точку X.

**Проволока вдоль экватора.**

*Вообразите, что земной шар плотно обтянут по экватору стальной проволокой. Что произойдет, если эта проволока охладится на 1?. От охлаждения проволока должна укоротиться. Если она при этом не разорвалась и не растянулась, то как глубоко она врежется в почву?*

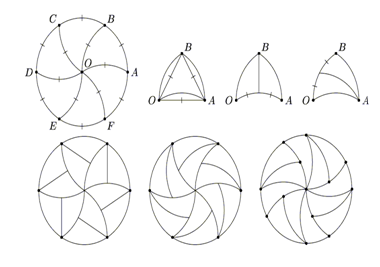
Решение.

Казалась бы, столь незначительное понижение температуры, всего на 1, - не может вызвать заметного углубления проволоки в землю. Расчеты показывают другое. Охлаждаясь на 1, стальная проволока укорачивается на одну стотысячную долю своей длины. При длине в 40 миллионов метров (длина земного экватора) проволока должна сократиться на 400 м. Но радиус этой окружности из проволоки уменьшится не на 400 м, а гораздо меньше. Для того чтобы узнать, насколько уменьшится радиус, нужно 400 м разделить на 6,28 т.е. на 2. Получится около 64 м. Итак, проволока, охладившись всего на 1, должна была бы при указанных условиях врезаться в землю не на несколько миллиметров, как может казаться, а более чем на 60 м.

**Деление круга.**

*Разрежьте круг на несколько равных частей так, чтобы центр круга не лежал на границе хотя бы одной из них.*

### Решение

Разобьём окружность с центром в точке O на шесть равных частей точками A, B, C, D, E и F. Понятно, что треугольники OAB, OBC, OCD, ODE, OEF, OFA - равносторонние. Проведём дугу окружности с центром в точке A радиуса AB от точки B до точки O. Аналогично проведём дуги окружностей с центрами в точках B, C, D, E, F (см. рис.). Таким образом, мы разбили окружность на 6 равных частей. Теперь каждую из этих частей разобьём на две равные части одним из двух способов, изображённых на рисунке.  


**Часы - трисектор**

*Возможно ли при помощи циркуля, линейки и часов разделить данный угол на три равные части?*

Решение.

Возможно. Переведите фигуру данного угла на прозрачную бумагу и в тот момент, когда обе стрелки часов совмещаются, наложите чертеж на циферблат так, чтобы вершина угла пошла вдоль стрелок.

В тот момент, когда минутная стрелка часов передвинется до совпадения с направлением второй стороны данного угла (или передвиньте её сами), проведите из вершины угла луч по направлению часовой стрелки. Теперь при помощи циркуля и линейки этот угол удвойте и удвоенный угол снова удвойте . Полученный таким образом угол и будет составлять данного.

Действительно, всякий раз, как минутная стрелка описывает некоторый угол , часовая стрелка за это время передвигается на угол в 12 раз меньше а после увеличения этого угла в 4 раза получится .

Использованная литература:

1. Геометрия, 7-9: Учеб. Для общеобразоват. учреждений / Л.С.Атанасян, В.Ф.Бутузов, С.Б. Кадомцев и др.
2. Занимательная геометрия, Я.И.Перельман.
3. Детская математическая энциклопедия.